数理解析研究所講究録
290巻 1977年 42-56

Conditional Expectations and Chunnel Operators

東工大理学部　梅垣寿春
同　恩田美恵子

Conditional expectationsという概念は、元来確率論における基本的なものであり、これが重要な役割を演じていることは周知の事実である。これの函数解析的な手法による取扱いはかなり以前（1950年代）よりなされている。例えば文献[10]，[11]又は[17]参照。この報告では、初めに古典的なconditional expectationsの導入を行い、次にこれの作用素としての特性について述べる。その特性がAverging Operatorsとして表わされる。一方古くよりReynolds identityという乱流理論より発生した概念があるが、それによるReynolds Operatorsについて述べ、それとAveraging Operatorの関連にふれる。次にchunnelとAveraging Operatorsの対応関係について論じ、情報理論における

Channelが実は、函数解析における作用素の理論として扱いうることを述べる。

§1. 確率空間上のConditional Expectations

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$を確率測度空間とする。$\mathcal{L}$を$\mathfrak{A}$の有限部分代数、$\mathcal{L}_0$を$\mathcal{L}$の内のatoms全体とすると、$(\mathcal{L}_0, P)$は有限確率(=完全)事象系である。このとき

$$P(A/\mathcal{L}) = \sum_{B\in\mathcal{L}_0} 1_B \, P(A\wedge B)/P(B)$$

をConditional probability of $A\in\mathfrak{A}$ relative to $\mathcal{L}$という。ここで 1_BはBの定義函数である。さらにスカラー値な確率変数f(=$\mathfrak{A}$-可測函数)に対して

$$E(f/\mathcal{L}) = \sum_{B\in\mathcal{L}_0} \frac{1_B}{P(B)} \int_B f(\omega)\, P(d\omega)$$

とおき、これをConditional expectations (of f) relative to $\mathcal{L}$という。とくに、$f = 1_A$ とおくと

$$E(1_A/\mathcal{L}) = P(A/\mathcal{L})$$

である。Conditional expectations $E(f/\mathcal{L})$に関する重要な定式は

$$(1.1)\quad \int_B E(f/\mathcal{L})(\omega) P(d\omega) = \int_B f(\omega)\, P(d\omega),\quad {}^{\forall}B\in\mathcal{L}$$

である。この式が Conditional expectations の1つの characterization である。

以上では $\mathcal{L}$ を Ω の有限な部分代数と仮定したが、この仮定を取り去り、以下、$\mathcal{L}$ を必ずしも有限でない σ－部分代数であるとする。この $\mathcal{L}$ に対して conditional expectations の導入の式は (1.1) によって行われる。

定理 1.1. $\forall f \in L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}, P)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して函数 $E(f/\mathcal{L}) \in L^p(\mathcal{L}) = L^p(\Omega, \mathcal{L}, P)$ が一意に定って式 (1.1) を満す。

変換 $E(\cdot/\mathcal{L}) : f \longrightarrow E(f/\mathcal{L})$ は線形であり、次の諸条件を満足する。

$1°$ $E(\cdot/\mathcal{L})$ は $L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\mathcal{L})$ (＝ $L^p(\Omega)$ の閉部分空間) 上への norm one projection である。即ち、

$$\|E(f/\mathcal{L})\|_p \leqq \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\Omega)$$

$$E(E(f/\mathcal{L})/\mathcal{L}) = E(f/\mathcal{L})$$

$2°$ $E(1/\mathcal{L}) = 1$;

$3°$ $E(\bar{f}/\mathcal{L}) = \overline{E(f/\mathcal{L})}$; $E(f/\mathcal{L}) \geqq 0$ if $f \geqq 0$;

$4°$ $E(fg/\mathcal{L}) = E(f/\mathcal{L})g$, $\forall g \in L^\infty(\mathcal{L})$;

$5°$ $\int_\Omega E(f/\mathcal{L})(\omega) P(d\omega) = \int_\Omega f(\omega) P(d\omega)$.

これらの内で $1°$ の不等式の証明は、$f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\mathcal{L})$

$$\left| \int_\Omega E(f/\mathcal{L}) g \, P(d\omega) \right| = \left| \int_\Omega fg \, P(d\omega) \right| \leqq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

($1/p + 1/q = 1$) がつねに成立していることからえる。
$4°$ の等式は

$$\int_B E(fg/\mathcal{L}_0) = \int_B fg = \int_B E(f/\mathcal{L}_0)g, \quad {}^\forall B \in \mathcal{L}_0$$

(ここで "$P(d\omega)$" を消略, 以下同様) が $g = 1_{B_0}$ ($B_0 \in \mathcal{L}_0$) のとき成立, 従って $g = \Sigma \beta_i 1_{B_i}$ ($B_i \in \mathcal{L}_0$) のとき成立。故に任意の $g \in L^\infty(\mathcal{L}_0)$ でも成立。$E(fg/\mathcal{L}_0)$, $E(f/\mathcal{L}_0)g$ が共に $\mathcal{L}_0$-可測からこれらが a.e で一致することが分る。等式 $4°$ が実は重要なのである, §2 参照。

§2. <u>Averaging Operators と Reynolds Operators.</u>

いま $\mathcal{A}$ を抽象的な $*$ algebra (over complex field) とする (unit $1 \in \mathcal{A}$ を仮定)。今, $\mathcal{A}$ 上で二つの線形作用素 A, R, を考える。

(A) $\quad A(fAg) = Af \cdot Ag, \quad Af^* = (Af)^*$

(R) $\quad R(fg) = Rf \cdot Rg + R((f - Rf)(g - Rg))$

$\quad\quad R f^* = (Rf)^*$

式 (A) を Averaging identity, (R) を Reynolds identity といい, 作用素 A, R, をそれぞれ <u>Averaging Operator</u>, <u>Reynolds Operator</u> という。

<u>定理 2.1. A が $*$ algebra $\mathcal{A}$ 上の Averaging operator で且つ $A1 = 1$ ならば A は Reynolds operator</u>

である。

証明　Averaging idenlity (A)において $f=1$ とおくと $A^2g = A\cdot Ag = Ag$. また Reynolds identity (R) の両辺で RをAで置き換えると (R) の右辺[$R=A$ として] $= Af\,Ag + A(fg - fAg - Af\cdot g + Af\cdot Ag)$

$$= Af\,Ag + A(fg) - A(fAg) - A(Af\cdot g) + A(Af\cdot Ag)$$

$$= Af\cdot Ag + A(fg) - Af\cdot Ag - Af\cdot Ag + Af\cdot Ag$$

（等式 (A) 及び $A^2=A$ による）

$= A(fg) =$ 等式 (A) の左辺　[$R=A$ とする。]

次に定理2.1.の逆を証明したいのであるが、これは、一般の $*$ algebra ではえない。当面、吾々が必要とするのは、確率測度空間 $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ の L^∞ の場合、即ち $\mathcal{Q} = L^\infty(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) = L^\infty(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ の場合である。この $\mathcal{Q}$ は通常の意味で $*$ algebra となる。($f, g \in \mathcal{Q}$ に対して $f\cdot g(\omega) = f(\omega)\cdot g(\omega)$, $f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}$) また $1 \in \mathcal{Q}$ であり、$\mathcal{Q} = L^\infty(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ は、Banach 空間 $L'(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ の dual である。(Riesz の定理)、このとき

定理 2.2.　<u>$*$ algebra $\mathcal{Q} = L^\infty(\Omega)$ 上の Reynolds Operator R において</u>、<u>R の rang $R(\mathcal{Q})$ が weakly* closed ならば R は Averaging Operator となる。</u>

証明.　$R(\mathcal{Q})$ が $\mathcal{Q}$ の s.a. subalgebra ($g \in R(\mathcal{Q}) \Rightarrow g^* \in R(\mathcal{Q})$) なことは、Reynolds identity から明らか

である。$R(\mathcal{A})$がweakly* closed（つまりweak* topologyでclosed）は、Hilbert空间$L^2(\Omega)$上のmultiplication algebraとしてweak topologyでclosedであることと同等である。これより

$$\exists u \text{ (unit element)} \in R(\mathcal{A}),\ = u^*$$

これを用いてRがidenpotentとなることを示し、結局、目標の等式（A）（A=Rとおいた等式）が示せる。

§3. Averaging Operatorsの特性

この§は、Kelleyの論文[9]よりの引用であるが、実は、次の§で述べるabstractなinformation channelsのformulationの一つの過程に丁度一致する議論であるので敢えてここに説明することにした。

X, Yをcompact Hausdorff空间とし、C(X), C(Y)を連続函数空间、M(X), M(Y)をそれらのdual空间とする。M(X), M(Y)は夫々bounded signed measures全体のなすBanach空间と考えられる（normは全変分によって与えられる）。$\mathcal{L}(X, Y)$を$C(X) \longrightarrow C(Y)$なるbdd linear operatorsの全体とする。これは作用素のnormによってBanach空间となっている。

定理3.1. 任意の$B \in \mathcal{L}(X, Y)$を与えるとき

$\forall y \in Y$, $\exists m_y \in M(X)$;

(3.1) $\quad (Bf)(y) = \int_X f(x) m_y(dx), \quad \forall f \in C(Y)$

であり, 且つ函数 $m_\cdot : y \in Y \to M(X)$ は weakly* continuous であり

(3.2) $\quad \|B\| = \sup\{\|m_y\| ; y \in Y\}$

を満足する。逆に上述の連続性と norm 条件をもつ $\{m_y ; y \in Y\}$ が与えられるとき式 (3.1) によって一意に作用素 $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ が定義される。従って Y 上で定義され $M(X)$-valued bdd weakly* continuous な函数 m_y と $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ は式 (3.1) によって一対一 isometric に対応する。

定理 3.2. $\quad B \in \mathcal{L}(X, X)$ が averaging

$\Longleftrightarrow \quad Bf^* = (Bf)^* \quad (f^* \triangleq \bar{f})$ かつ

(3.3) $\quad (Bf)(x) = (Bf)(y) \quad$ for $\forall x \in \operatorname{supp}(m_y)$

証明 $\quad B(f Bg) = Bf \cdot Bg$

$$\Longleftrightarrow \int f(s) \int g(r) m_s(dr) m_y(ds) = B(fBg)(y)$$

$$= (Bf)(y)(Bg)(y) = \int f(s) m_y(ds) \int g(r) m_y(dr)$$

$$\Longleftrightarrow \int f(s) \left(\int g(r)(m_r - m_s)(dr) \right) m_y(ds) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int g(r)(m_y - m_s)(dr) = 0 \quad \forall s \in \operatorname{supp} m_y$$

$$\Longleftrightarrow (Bg)(y) = (Bg)(s) \quad \forall s \in \operatorname{supp} m_y$$

§4. Channel Operators

X, Y, $C(X)$, $C(Y)$, $M(X)$, $M(Y)$ は前§と同じものとする。$P(X)$ ($\subset M(X)$) を確率測度の全体 $B(X)$ を bounded Baire 函数の全体とする。Y に対しても同様。

さて，一つの triple $[X, \nu, Y]$ が channel である，或いは ν が channel (distribution) with input X and output Y であるということは，次の如くして定義される：

(c.1) $\forall x \in X$ に対して $\nu(x, \cdot) \in P(Y)$

(c.2) $\forall V \in \mathfrak{B}_Y$ に対して $\nu(\cdot, V)$ は $(X, \mathfrak{B}_X)$ 上で可測

T を X 上の一つの homeomorphism，同様に同じ記号で Y 上の一つの homeomorphism T を与えておく。Channel $[X, \nu, Y]$ 又は ν が T-定常 (stationary) であるとは，次の条件 (c3) を満すときをいう：

(c3) $\nu(x, X) = \nu(Tx, TV)$ for $\forall x \in X$, $V \in \mathfrak{B}_Y$

$\mathbb{C} = \mathbb{C}(X, Y)$ を channels ν with X and Y の全体とし $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}_T(X, Y)$ を $\{\nu \in C \,;\, \nu$ は T-定常$\}$ とすると $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_T$ は共に convex 集合となる。

$\Omega = X \times Y$ (直積) とおくとこれも compact Hausdorff 空間で $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ である。$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(X) \otimes \{\lambda 1_Y\}$

($\{\lambda 1_Y\}$はY上のconstantな函数全体）とすると$\mathcal{B}$は可換なB^*algebraであり$\mathcal{B}_0$はそのclosedな$*$subalgebraとなる。Tは$(Tf)(x, y) = f(Tx, Ty)$となる。$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$を$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0$ (onto)なるaveraging operators Aで$A1 = 1$かつ

$$(A_0) \quad f_n \downarrow 0 \quad (f_n \in \mathcal{B}) \quad \Rightarrow \quad Af_n \downarrow 0$$

(正の単調連続性）を満すAの全体：$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_T(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0) \triangleq \{A \in \mathcal{A};\ AT = TA \text{ on } \mathcal{B}\}$とする。このとき

定理 4.1. $\mathcal{A}$と$\mathcal{C}$又は$\mathcal{A}_T$と$\mathcal{C}_T$の間に一対一なaffine対応$A \longleftrightarrow \nu$が存在する：

$$(Af)(x) = \int_Y f(x, y)\, \nu(x, dy), \qquad f \in \mathcal{B}.$$

これによってchannelsは可換なB^*algebraからそれのsubalgebraへの正の単調連続性をもったaveraging operatorsのことであり，さらにchannelsの定常性はaveraging operatorsとshift変換の可換性によって表わされる。上述のaveraging operators $A \in \mathcal{A}$または$\mathcal{A}_T$をchannel operatorという。これらの構成，概念，命題などを非可換の場合にすでにextendされている。このことの論述は小沢正直君の論文［14］を参照（観測理論との関連）.

定理 4.1. の対応$A \longleftrightarrow \nu$によってchannels νの

エルゴード性が作用素 A の extremal な性質と等値であることが知られる（梅垣 又は中村八束の論文[12], [13], [19], 参照）。

§5. Banach 空間に値をとる函数の Conditional Expectations

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ 上の conditional expectations の導入は Radon-Nikodym の定理を用いて行うのであるがこの R-N の定理の成立については 確率空間の場合は何等の懸念を必要としない。これは 考える確率空間が numerical なものを基本にとるからである。ところが 多くの場合は確率変数の値が種々な Banach 空間にとらればならぬ場合がある。そのような函数に対する conditional expectations の導入の必要があるのである. これは numerical の場合同様 次のように formulate される。E を (fixed) Banach 空間, $\Omega = (\Omega, \mathfrak{A}, P)$ 上で定義され E に 値をとる函数が Bochner の意味で可測なものを $\mathfrak{A}$ に関して strong random variable という。そのような f に対して Bochner 積分が定義される。Bochner 可積分な strong random variables の全体を $L^1(\Omega; E)$ で表わす。これに対して Conditional Expectations $\mathcal{E}[f/\mathcal{L}]$

($\mathcal{L}$はΩのσ-subalg.)が導入される。

$\forall f \in L^1(\Omega;\mathbb{E})$に対して

(i) $\mathcal{E}[f/\mathcal{L}]$は$\mathcal{L}$に関してstrong random variableでかつBochner可積分

(ii) $\int_B \mathcal{E}[f/\mathcal{L}](\omega)P(d\omega) = \int_B f(\omega)P(d\omega)$ for $B \in \mathcal{L}$

ここで積分はBochner senseである。このようなBanach space valuedな函数のconditional expectationの存在は常に成立する。この証明は、[6] 及び [19] など参照。

Conditional expectationsの導入の次に函数解析的手法の活動が可能なのはmartingalesの構成である。これは確率論において重要であるstochastic processの一つであるが、これを函数解析の枠組に入れて捉えることが可能となる。これの詳述はここでは消略する。論文[4], [6], および[21]など参照されたい。

§6. Appendix. Reynolds operatorsの積分作用素としての記述.

一つの流体を考え、それの時刻tにおける速度成分を$u(x,t)$とする(xは位置の座標, tはtime)。これに対して積分

$$R_T u = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(x, t+\tau)d\tau \triangleq \bar{u}(x,t)$$

を考える。これは time-interval $[t-T, t+T]$ における $u(x,t)$ の平均である。一般に流体の速度成分を数学的に記述するために，それらを二変数 x と t についての連続函数 $u(x,t)$ によって表わす場合が多い。このような連続函数全体 $\mathbb{C}$ とすると $R=R_T$ は $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (into) の線型変換であり

$$R1 = 1 \ ; \quad Ru \geq 0 \quad \text{if} \quad u \geq 0$$

$$Ru_n \to Ru \quad \text{if} \quad u_n \to u \ , \ \text{in uniform},$$

を満足する。さらに R は任意の推移変換と可換である。

$L_{a,b}$: $u(x,t) \to u(x+a, t+b)$ として $RL_{a,b} = L_{a,b}R$。

Reynolds はその流体の乱流の理論の point になっている方程式を次のように設定した：

$$\overline{uv} = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u^c} \cdot \overline{v^c} \ (u^c = u - \overline{u} \ , v^c = v - \overline{v})$$

これを作用素 R (: $Ru = \overline{u}$) によって表わすと，これが Reynolds の等式 (R) となる。容易にわかるがこの等式は次の等式と同等である

$$(R') \quad R(fRg + Rf \cdot g) = Rf \cdot Rg + R(RfRg) \ 。$$

Reynolds operators や Averaging Operators の定義は §2 を参照することとし一般に $R1 = 1$ を満す Reynolds operator R が Averaging Operator とならない興味ある例が Kampé de Feriet の論文 [8] にある。

いま常微分方程式

$$(6,1)\qquad \frac{dy}{dt} + g = f$$

を考える。これは境界条件 $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} g(t) = \mathrm{const}(f)$ の下で unique solution をもつ：

$$(6,2)\qquad g = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)e^{\lambda}\,d\lambda \quad .$$

$\mathbb{C}_1 \triangleq$ {real line 上の連続函数 f で $\exists \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t)$ の全体}

とすると，$\forall f \in \mathbb{C}_1$ に対して (1) の解 $g \in \mathbb{C}_1$ が unique に定まることが知られるわけで，その g を Rf とおく。R は $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_1$ (into) の positive linear operator で R は $R1 = 1$ を満すことは容易にわかるが等式 (R')，従って (R) を満すこともう少し計算すればえる (cf. Dubreil-Jacotin の論文 [3])。然るに，この R は $R^2 \neq R$ である。なぜなら $D = (d/dt + 1)$ とおくと

$$(6,1) \iff DRf = f \quad \forall f \in \mathbb{C}_1$$

もし $R^2 = R \Rightarrow R^2 f = Rf,\ DR^2 f = DRf$. これの左辺 $= Rf$，右辺 $= f$。$\therefore\ \forall f \in \mathbb{C}_1$ が R の不動点となり矛盾。一方

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t+\tau)\,d\tau = (Au)(t), \quad \forall u \in \mathbb{C}_1$$

はつねに存在する。これが linear, pos, $A1 = 1$ は clear. 更に等式 $A(fAg) = AfAg$ が成立する。これを示すた

めには. $A^2 = A$ on $\mathbb{C}_1$ を示せばよい。$\forall f \in \mathbb{C}_1$に対して

$$\frac{1}{4TT'}\int_{-T}^{T}\int_{-T'}^{T'} f(t+s+r)\,ds\,dr = \frac{1}{4TT'}\int_{-T}^{T}\int_{-T'+s}^{T'+s} f(t+r)\,dr\,ds$$

ここで $T \to \infty$, $T' \to -\infty$ とすると

$$[\text{上式の左辺}] \longrightarrow (A\,Af)(t)$$

$$[\text{上式の右辺}] \longrightarrow (Af)(t)$$

となり $A^2 = A$ が成立する。

References

[1] G. Birkhoff, Lattice in Applied Math. Symposium in Lattice, 1960.

[2] S. D. Chatterji, Martingale Convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach Spaces, Math. Scand. 23 (1968), 21-41.

[3] Dubreil-Jacotin, Colloque d'Algebre Superieure du C. B. R. M. December, (1956).

[4] F. Hiai, Radon-Nikodym Theorems for Set-valued Measures, Research Reports on Information Sciences, Series A: Mathematical Science. Tokyo Instit. of Tech. (1976), No. A-32.

[5] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS Colloq. Pub. 31 (1957).

[6] Mieko Hirahara, On the Generalized Radon-Nikodym Theorems and Riesz's Representation Theorems. M. A. Thesis (1972), 2, 30 pp.

[7] Y. Kakihara, Information Channels between Compact Groups, Res. Reports on Inf. Sci. Ser. A, Math. Sci. Tokyo Inst. Tech. (1976), No. A-28.

[8] Kampé de Ferist, Proc. Akad. Wet.Amsterdam, Vol. 53 (1951).

[9] J. L. Kelley, Averaging Operators $C_\infty(X)$, Illinois J. Math., Vol. 2

(1958), pp. 214-223.

[10] S-T C. Moy, Characterizations of Conditional Expectation as a Transformation on Function Spaces, Pacific J. Math. 4 (1954), 47-65.

[11] M. Nakamura and T. Turumaru, Expectations in an Operator Algebra, Tōhoku Math. J. 6 (1954).

[12] Y. Nakamura, Measure Theoretic Construction for Information Theory, Kōdai Math. Sem. Rep. Vol. 20 (1968).

[13] Y. Nakamura, Ergodicity and Capacity of Information Channels with Nois Sources, J. Math. Soc. Japan, Vol. 27 (1975), pp. 213-221.

[14] M. Ozawa, Channel Operators and Quantum Measurements, Research Reports on Information Sciences, Series A: Mathematical Science. Tokyo Instit of Tech. (1976), No. A-29 and A-30.

[15] O. Reynolds, Trans. Roy. Soc. Vol. A 186 (1894).

[16] R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces. Ann. Math. Studies. 26 (1950).

[17] H. Umegaki, Conditional Expectation in an Operator Algebra, Tōhoku Math. J. 6 (1954), 177-181; II, Ibid 8 (1956), 86-100; III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959); IV, Ibid 14 (1962), 59-85.

[18] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach Space-valued Random Variables and Tensor Product of Banach Spaces, J. Math. Analysis and Appls. 31 (1970), 49-67.

[19] H. Umegaki, Representations and Extremal Properties of Averaging Operators and their Applications to Information Channels, J. Math. Analysis and Appls. Vol. 25 (1969), pp. 41-73.

[20] H. Umegaki, Absolute Continuity of Information Channels, J. Multivariate Analysis, Vol. 4 (1974), pp. 382-400.

[21] H. Umegaki and M. Onda, Martingales and Optimal Functions (Under the Preparation).